INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA

Sesión 05/16

El proceso de Wiener

Introducción

Si bien la concepción mecanicista de la naturaleza sufrió serios reveses durante los siglos XIX y XX, alcanzó éxitos importantes, uno de los cuales fue la teoría cinética de la materia. Los fenómenos del calor, por ejemplo, pudieron ser explicados por los movimientos de partículas que actuan unas sobre otras mediante fuerzas simples.

De acuerdo con la teoría cinética de la materia, un gas, por ejemplo, está constituido por una cantidad enorme de moléculas las cuales se mueven en todas direcciones y chocan las unas con las otras. El calor del gas no es entonces más que la energía cinética del movimiento molecular.

Lo mismo ocurre con un líquido, el cual estaría constituido por moléculas que se mueven en todas direcciones y chocan las unas con las otras. El acuerdo de esta idea con la realidad fue verificada por Albert Einstein al explicar, utilizando la teoría cinética, el movimiento que se observa, en un microscopio, de un grano de polen suspendido en agua.

En el año 1827 el botánico inglés Robert Brown observó que en una solución de agua el polen de cierta hierba (Clarkia pulchella) realizaba un movimiento continuo, muy accidentado, en zigzag.

"Mientras examinaba la forma de esas partículas inmersas en el agua, observé que muchas de ellas estaban manifiestamente en movimiento... Esos movimientos eran tales que, después de observaciones a menudo repetidas, me persuadí de que no podían provenir ni de la corriente del fluido, ni de su evaporación gradual, sino que pertenecían a la partícula misma."

Brown había leido los comentarios de quienes antes se habían percatado de ese fenómeno y observó que tendían a asociarlo con la materia orgánica, asumiendo que estaba ligado con los mecanismos de la vida. Decía que se asumía que se trataba de ".. moléculas elementales de cuerpos orgánicos, primero consideradas así por Buffon y Needhan y después por Wrisberg con gran precisión, más adelante y todavía con mayor particularidad por Muller y muy recientemente por Milne Edwards, quien había reavivado su estudio apoyándolo con muchos detalles interesantes."

El gran mérito de Brown fue el no dejarse persuadir fácilmente. Una vez que observó el fenómeno con especímenes de plantas vivas se preguntó si persistiría en plantas que estuvieran muertas. Observó entonces el mismo fenómeno con granos de polen prservados durante 11 meses en una solución alcohólica, especificamente de Viola tricolor, Zizania acuática y Zea. También puso dentro de un recipiente con agua el polen de plantas que habían muerto cien años antes. Observó que este polen también realizaba el mismo tipo de movimiento. Brown relata su sorpresa de la forma siguiente: ".... me llamó la atención este hecho tan inesperado de aparente vitalidad retenida por estas moléculas tanto tiempo después de la muerte de la planta."

Brown pasó a considerar especímenes claramente no vivos, incluyendo rocas de todas las edades, las cuales apórtaban partículas en abundancia. Concluyó que con cualquier mineral sólido se observa el fenómeno a condición de reducirlo a la forma de granos suficientemente finos.

Una de las cosas más sorprendentes de estas observaciones es que el movimiento de las partículas suspendidas parece no cesar nunca, lo cual entra en contradicción con el principio de conservación de la energía.

La explicación de Einstein de este fenómeno fue que las partículas brownianas visibles al microscopio son golpeadas por las partículas más pequeñas que constituyen el agua. El movimiento browniano existe si las partículas bombardeadas son suficientemente pequeñas. Existe porque ese bombardeo no tiene lugar de una manera uniforme de todos los lados. El caracter irregular y contingente del camino que recorren las partículas brownianas refleja una irregularidad similar de los caminos que recorren las partículas más pequeñas que constituyen la materia.

El movimiento observado por Brown se constituyó en una evidencia de la teoría molecular ya que la única explicación que se encontró para tal movimiento fue que los granos de polen se mueven al ser golpeados por las moléculas de agua. Con base en esta explicación, Albert Einstein encontró que la posición de un grano de polen puesto sobre el agua puede ser descrito probabilisticamente mediante una distribución normal. Años después, en 1910, Jean Perrin realizó un estudio detallado del movimiento browniano y, apoyándose en un trabajo realizado en 1888 por Louis Georges Gouy, llegó a las siguientes conclusiones respecto al movimiento que siguen pequeñas partículas que se colocan sobre un fluido:

1. El movimiento es irregular, van, vienen, suben y bajan.

2. Las trayectorias que siguen las partículas son funciones continuas pero no derivables.

3. El movimiento no se debe a las vibraciones transmitidas al fluido, ya que se observa de la misma manera bajo diversas circunstancias.

4. El movimiento tampoco se debe a las corrientes que existen en el fluido cuando no se ha alcanzado el equilibrio térmico, ya que no se observa algún cambio significativo cuando se alcanza ese equilibrio.

5. Se descarta que el movimiento sea como el que se observa en las partículas de polvo que se encuentran en el aire, ya que en estas últimas las partículas vecinas se mueven en la misma dirección, mientras que los movimientos de las partículas colocadas sobre el fluido y que se encuentran cercanas, son independientes unos de otros.

6. La naturaleza de las partículas que se colocan sobre el fluido parece no tener relevancia.

7. El movimiento nunca cesa.

Entre 1921 y 1923, Norbert Wiener (1894-1964) construyó un modelo matemático para el movimiento browniano. Para esto, utilizó un método de extensión que no es el de Carathéodory sino el que había encontrado Daniel en 1920 para definir una integral en un espacio de dimensión infinita.

El proceso de Wiener es un ejemplo de proceso estocástico, de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 1. *Sean* $(E, \mathcal{E})$ *un espacio medible y* Γ *un conjunto cualquiera. Llamaremos proceso estocástico definido sobre* $(\Omega, \Im, P)$*, con conjunto de índices en* Γ *y con espacio de estados* E*, a toda familia* $\{X_t\}_{t\in\Gamma}$ *de funciones medibles definidas sobre* Ω *y con valores en* E*. Dada* $\omega \in \Omega$*, la función* $t \to X_t(\omega)$ *es llamada una trayectoria del proceso. Para referirnos a un proceso estocástico* $\{X_t\}_{t\in\Gamma}$ *utilizaremos la notación* $(X_t)_{t\in\Gamma}$*.*

En general, un proceso estocástico representa la dinámica de un fenómeno aleatorio, en cuyo caso el conjunto Γ de índices representa el tiempo durante el cual evoluciona el fenómeno en consideración, así que Γ es un conjunto de números reales. El caso más común consiste en el estudio de un fenómeno aleatorio que evoluciona a partir de un tiempo inicial $t_0 \geq 0$, de manera que Γ es un subconjunto de $[0, \infty)$; en muchos casos de interés, se trata del conjunto de números enteros no negativos, del conjunto de números enteros no positivos o del conjunto de números reales no negativos.

Recordemos que $\mathbb{R}^+$ denota al conjunto de números reales no negativos y $\overline{\mathbb{R}}^+$ al conjunto $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

Para cada $t \in \Gamma$, X_t representa lo que llamaremos el estado del proceso en el tiempo t. Este estado no está determinado, puede ser uno cualquiera de los valores que toma X_t. Lo único conocido es la ley probabilística mediante la cual evoluciona el proceso, la cual, en particular, nos dice cuál es la distribución de X_t. Esta distribución no es más que una medida de probabilidad definida sobre la σ-álgebra generada por X_t, cuyos elementos son aquellos eventos que dependen únicamente del estado del proceso en el tiempo t, a saber, todos los de la forma $[X_t \in B]$, donde $B \in \mathcal{E}$.

Definición 2. *Si* $(X_t)_{t\in\Gamma}$ *es un proceso estocástico y* $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ *es un subconjunto finito de* Γ*, la distribución del vector aleatorio* $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ *será llamada una distribución finito dimensional del proceso.*

Construcción del proceso de Wiener

El proceso de Wiener modela el movimiento, en una dimensión, de un movimiento browniano.

Considegrano las propiedades que tiene un movimiento browniano, se tiene de inicio lo siguiente:

Imaginando que el grano de polen se mueve en un plano cartesiano infinito, considerando la proyección del movimiento sobre uno de los ejes, digamos el horizontal, se tiene una partícula que se mueve sobre una línea recta, así que, en cada tiempo $t \geq 0$, la partícula se encuentra en una posición que denotaremos por W_t. Esta posición es aleatoria ya que el movimiento del grano de polen se debe a los choques que recibe de las moléculas de agua. Lo que se busca entonces es un espacio de probabilidad en el cual se pueda definir una familia de variables aleatorias reales $\{W_t : t \in [0, \infty)\}$ de tal manera que W_t represente la posición de la particula en el tiempo t. Para esto, se parte de las propiedades que se observan en un movimiento browniano, o mejor dicho, de propiedades que se aproximan a las observaciones. Estas propiedades consisten en lo siguiente:

1. El grano de polen no se mueve a saltos, sino de una manera continua; así que, cualquiera que sea su movimiento, la función $t \to W_t$ es continua.

2. El punto de inicio del movimiento se toma como el origen de la linea recta sobre el cual se mueve la partícula. Así que $W_0 = 0$.

3. El movimiento que sigue la partícula a partir de su posición en un tiempo $t > 0$, es independiente de como haya sido en el intervalo $[0, t]$. Así que, Si $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ son números reales positivos, entonces las variables aleatorias $W_{t_1} - W_0$, $W_{t_2} - W_{t_1}$, $\ldots$, $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes.

4. Si $0 \leq s < t$, la distribución de $W_t - W_s$ es normal com parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = t - s$.

A partir de estas propiedades podemos obtener las distribuciones finito dimensionales del proceso.

Si $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ son números reales positivos, sabiendo que las variables aleatorias $W_{t_1} - W_0$, $W_{t_2} - W_{t_1}$, $\ldots$, $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes, podemos encontrar la función de densidad conjunta de $W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n}$ considerando la transformación $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por:

$y_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, para $k \in \{1, \ldots, n\}$.

cuya inversa, ϕ, está dada por:

$x_1 = y_1$

$x_k = y_k - y_{k-1}$, para $k \in \{2, \ldots, n\}$.

En efecto, se tiene:

$(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}) = \varphi\left(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\right)$

Como ejemplo, tomando 8 tiempos, $t_1 < t_2 < \cdots < t_8$, escrito en forma matricial, la transformación φ está dada por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ W_{t_3} \\ W_{t_4} \\ W_{t_5} \\ W_{t_6} \\ W_{t_7} \\ W_{t_8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ W_{t_3} - W_{t_2} \\ W_{t_4} - W_{t_3} \\ W_{t_5} - W_{t_4} \\ W_{t_6} - W_{t_5} \\ W_{t_7} - W_{t_6} \\ W_{t_8} - W_{t_7} \end{pmatrix}$$

La inversa, ϕ, de φ está dada entonces por la matriz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El jacobiano de ϕ es el valor absoluto del determinante de la matriz A^{-1}, el cual es igual a 1.

Así que:

$f_{W_{t_1},\ldots,W_{t_n}}(y_1,\ldots,y_n)$

$= |J_\phi(y_1,\ldots,y_n)|\, f_{W_{t_1},W_{t_2}-W_{t_1},\ldots,W_{t_n}-W_{t_{n-1}}}\left(\phi(y_1,\ldots,y_n)\right)$

$= f_{W_{t_1},W_{t_2}-W_{t_1},\ldots,W_{t_n}-W_{t_{n-1}}}\left(\phi(y_1,\ldots,y_n)\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})}}\exp\left\{-\frac{1}{2t_1}y_1^2\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2(t_2-t_1)}\left(y_2-y_1\right)^2\right\}\cdots\exp\left\{-\frac{1}{2(t_n-t_{n-1})}\left(y_n-y_{n-1}\right)^2\right\}$

$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t_1}y_1^2+\frac{1}{t_2-t_1}\left(y_2-y_1\right)^2+\cdots+\frac{1}{t_n-t_{n-1}}\left(y_n-y_{n-1}\right)^2\right]\right\}$

Algo similar se puede hacer cuando $t_1 = 0$.

En otras palabras, para cada subconjunto finito $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ de números reales no negativos, se tiene la función de densidad conjunta, y, por lo tanto, la función de distribución conjunta, de $W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n}$.

De lo que se trata entonces es de que, partiendo del conocimiento de esas distribuciones conjuntas, se pueda construir un espacio de probabilidad en el cual se pueda definir toda la familia de variables aleatorias $\{W_t : t \in [0,\infty)\}$ de tal manera que para cada subconjunto finito de números reales no negativos $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ la función de distribución conjunta de $W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n}$ sea la que se tenía al inicio.

El teorema de Kolmogorov asegura la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y una familia de variables aleatorias reales $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ con esas características.

Sin embargo, el teorema no nos dice nada acerca de la continuidad de las funciones $t \rightarrow W_t(\omega)$, definidas sobre $[0,\infty)$; es decir, de las trayectorias del proceso $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Entramos aquí a un punto sutil de gran importancia. ¿El conjunto de distribuciones finito dimensionales nos da información acerca de cómo son sus trayectorias? Veámos un ejemplo que da respuesta a esta pregunta:

Definamos $\Omega = (0,1)$, $\Im$ la σ-álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles en $(0,1)$ y P la medida de Lebesgue en $(0,1)$.

Para cada $t \in [0,\infty)$, definamos $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $Y_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$X_t(x) = x + t$

$$Y_t(x) = \begin{cases} x+t+1 & \text{si } t \in \{x+n : n \in \mathbb{N}\} \\ x+t & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tenemos entonces lo siguiente:

Si $t \in [0,1)$ o $t \in \mathbb{N}$:

$t \notin \{x+n : n \in \mathbb{N}\}$ para cualesquiera $x \in (0,1)$ y $n \in \mathbb{N}$.

Así que $Y_t(x) = X_t(x)$ para cualquier $x \in \Omega$.

Si $m \in \mathbb{N}$ y $t \in (m, m+1)$:

$t \in \{x+n : n \in \mathbb{N}\}$ si y sólo si $x = t - m$.

Así que $Y_t(x) = X_t(x)$ para cualquier $x \in \Omega - \{t-m\}$ y $Y_t(t-m) = (t-m)+t+1 = X_t(t-m)+1$.

Por lo tanto, $Y_t(x) = X_t(x)$, excepto cuando $x = t - m$.

Así que, $P[Y_t = X_t] = 1$ para cualquier $t \in [0,\infty)$.

Por lo tanto, los conjuntos de variables aleatorias $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$ y $\{Y_t : t \in [0,\infty)\}$ tienen las mismas distribuciones finito dimensionales.

Por otro lado:

Para cualquier $x \in \Omega$, la función $t \rightarrow X_t(x)$, definida sobre $[0,\infty)$, es continua en todo punto.

Para cualquier $x \in \Omega$, la función $t \rightarrow Y_t(x)$, definida sobre $[0,\infty)$, tiene una infinidad de discontinuidades ya que es discontinua en todo punto del conjunto $\{x+n : n \in \mathbb{N}\}$.

La conclusión es entonces que el conjunto de distribuciones finito dimensionales de una familia de variables aleatorias $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$ no nos da toda la información acerca de cómo son las funciones $t \to X_t(\omega)$.

También podemos concluir que, al construir un espacio de probabilidad donde se puedan definir variables aleatorias cuyas distribuciones conjuntas coincidan con las de un conjunto de distribuciones finito dimensionales dadas, la construcción no es única.

Modificación de la familia de variables aleatorias $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$

Vamos a sustituir la familia $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ por una nueva familia $\left\{\widetilde{W}_t\right\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ de tal manera que se cumpla lo siguiente:

a) $P\left[\widetilde{W}_t = W_t\right] = 1$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$.

b) Para cualquier $\omega \in \Omega$, la función $t \to \widetilde{W}_t(\omega)$, definida sobre $\mathbb{R}^+$, es continua.

Por la propiedad (a) $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ y $\left\{\widetilde{W}_t\right\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ tienen las mismas distribuciones finito dimensionales.

En el proceso de modificación vamos a utilizar el conjunto de los racionales diádicos, los cuales son los números racionales de la forma $\frac{k}{2^n}$, donde $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por D_n al conjunto de racionales diádicos de la forma $\frac{k}{2^n}$, donde $k \in \mathbb{Z}^+$; es decir:

$$D_n = \left\{0, \tfrac{1}{2^n}, \tfrac{2}{2^n}, \ldots\right\}$$

$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es entonces el conjunto de los racionales diádicos contenidos en el intervalo$[0, \infty)$, el cual es denso en ese intervalo.

El procedimiento que vamos a seguir para construir el proceso $\left(\widetilde{W}_t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ consiste en lo siguiente:

Para cada $\omega \in \Omega$ vamos a definir $\widetilde{W}_t(\omega) = W_t(\omega)$ para cualquier $t \in D$.

Después nos vamos a restringir a un intervalo $[0, N]$, donde $N \in \mathbb{N}$, y, para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos a considerar los valores de $\widetilde{W}_t(\omega)$ en los racionales diádicos $t \in D_n \cap [0, N]$.

En un plano cartesiano vamos a considerar los puntos $\left(t, \widetilde{W}_t(\omega)\right)$, con $t \in D_n \cap [0, N]$, y los vamos a unir, consecutivamente, mediante segmentos de recta, para obtener la gráfica de una función continua, lineal por pedazos, definida en el intervalo $[0, N]$, la cual denotaremos por $f_n^{(\omega)}$.

Después demostraremos que, con probabilidad 1, la sucesión de funciones $\left(f_n^{(\omega)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Para cada ω en ese conjunto de probabilidad 1, definiremos entonces la función $t \to \widetilde{W}_t(\omega)$, para $t \in [0, N]$, como la función a la que converge esa sucesión.

Paso 1.

Primero observemos que si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el intervalo $[0,N]$ que converge a t, entonces la sucesión de variables aleatorias $(W_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilidad a W_t.

En efecto, como, para cualquier pareja de números reales no negativos s y t tales que $s<t$, $W_t - W_s$ tiene distribución normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = t - s$, se tiene:

$E\left[(W_t - W_s)^2\right] = |t-s|$ para cualquier par de números reales no negativos s y t.

Así que, para cualquier $\beta > 0$, se tiene:

$$P\left[|W_t - W_{t_n}| > \beta\right] = P\left[(W_t - W_{t_n})^2 > \beta^2\right] \leq \tfrac{1}{\beta^2} E\left[(W_t - W_{t_n})^2\right] = \tfrac{1}{\beta^2}|t-s|$$

Por lo tanto:

$$\text{lím}_{n\to\infty} P\left[|W_t - W_{t_n}| > \beta\right] \leq \text{lím}_{n\to\infty} \tfrac{1}{\beta^2}|t-t_n| = 0$$

En lo que sigue vamos a seguir el método de Paul Lévy para definir el proceso de Wiener.

Comentario

Es interesesante la diferencia que existió entre Paul Lévy y J. L. Dob en cuanto a la forma en que pensaban un proceso estocástico. El libro de Doob se publicó en 1954 y en 1955 se publicó una segunda edición del libro de Lévy *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, de manera que Lévy pudo leer el libro de Doob antes de que se imprimiera esta segunda edición y, después de hacerlo, decidió agregar una nota al final de su libro. En ella, dice: "Un proceso estocástico es en principio un fenómeno en cuya evolución el azar interviene a cada instante. Para Doob, un proceso estocástico es simplemente una función aleatoria $X(t)$ de una variable t la cual puede uno imaginar que representa el tiempo. Cualquiera que sea el conjunto $\mathfrak{E}$ de determinaciones posibles de $X(t)$, se puede asociar a cada elemento de $\mathfrak{E}$ un valor de una variable simbólica ω; eso le permite a Doob considerar $X(t)$ como una función cierta $x_t(\omega)$ de t y de una variable aleatoria ω cuya elección resume todas las intervenciones sucesivas del azar. Es una notación a menudo cómoda, aunque dé como un todo, nacido en un instante, lo que, para mi, es esencialmente un perpetuo devenir."

Años después, en su libro *Probabilités et potentiel*, publicado en 1975, Paul Meyer y Claude Dellacherie expresaron una idea similar: "Frecuentemente se le reprocha a la teoría 'general' de procesos el ser abstracta, sin que se sepa bien lo que significa esa palabra, porque todas las matemáticas son abstractas. Si significa 'fatigante aprenderla', o incluso 'molesta', podemos estar de acuerdo, pero no aceptamos el reproche si quiere decir que la teoría de procesos es un desarrollo gratuito 'dentro del gusto francés'. En efecto, no se desarrolló como una disciplina autónoma, sino en estrecha relación con la teoría de las martingalas y de los procesos de Markov, como un conjunto de útiles que permitieran realizar el programa de Lévy, Doob, Ito, Chung, Hunt, y por el cual Chung realiza desde hace años una propaganda incansable "hay que mirar las trayectorias"".

Paso 2.

Para cada $\omega \in \Omega$ definamos $\widetilde{W}_t(\omega) = W_t(\omega)$ para cualquier $t \in D$.

Paso 3.

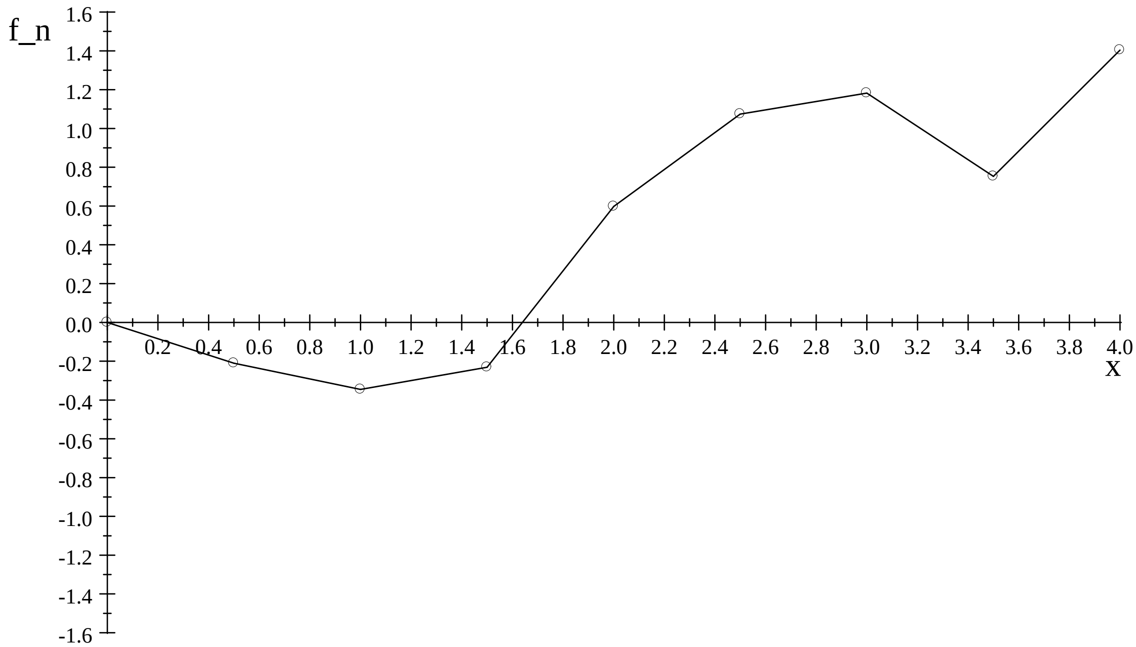
Para cada $n, N \in \mathbb{N}$ y $j \in \{0, 1, 2, \ldots, N2^n\}$ definamos:

$$t_j = \frac{j}{2^n}$$

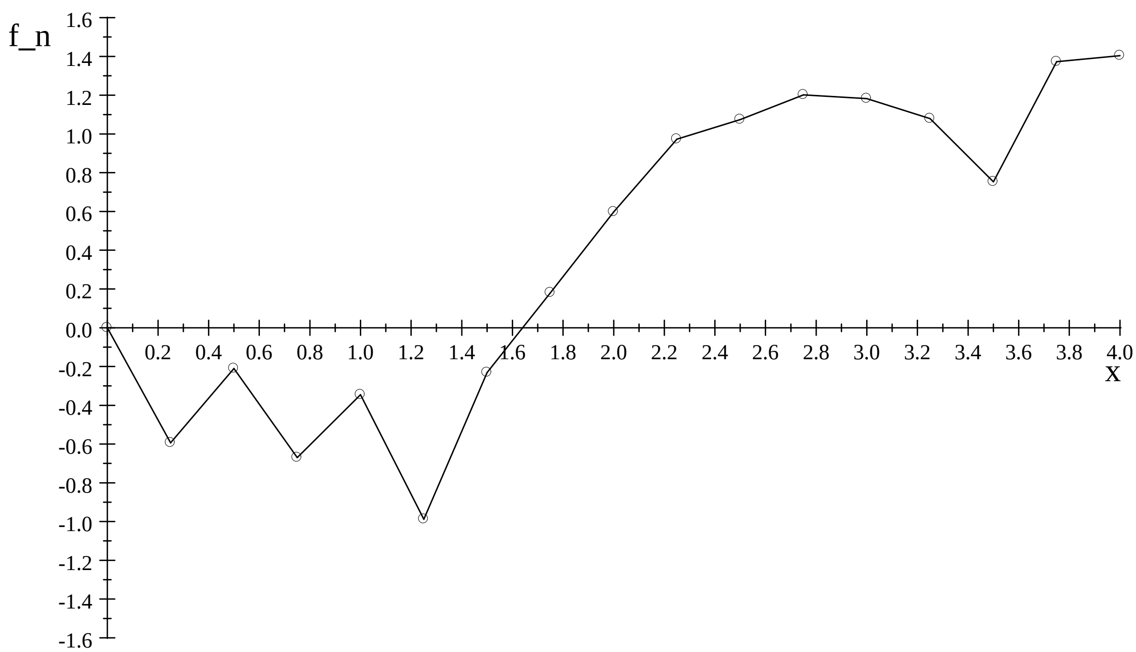
Consideremos entonces, para cada $\omega \in \Omega$, los siguientes puntos de $\mathbb{R}^2$:

$$(t_0, W_{t_0}(\omega)), (t_1, W_{t_1}(\omega)), (t_2, W_{t_2}(\omega)), \ldots, (t_{N2^n}, W_{t_{N2^n}}(\omega))$$

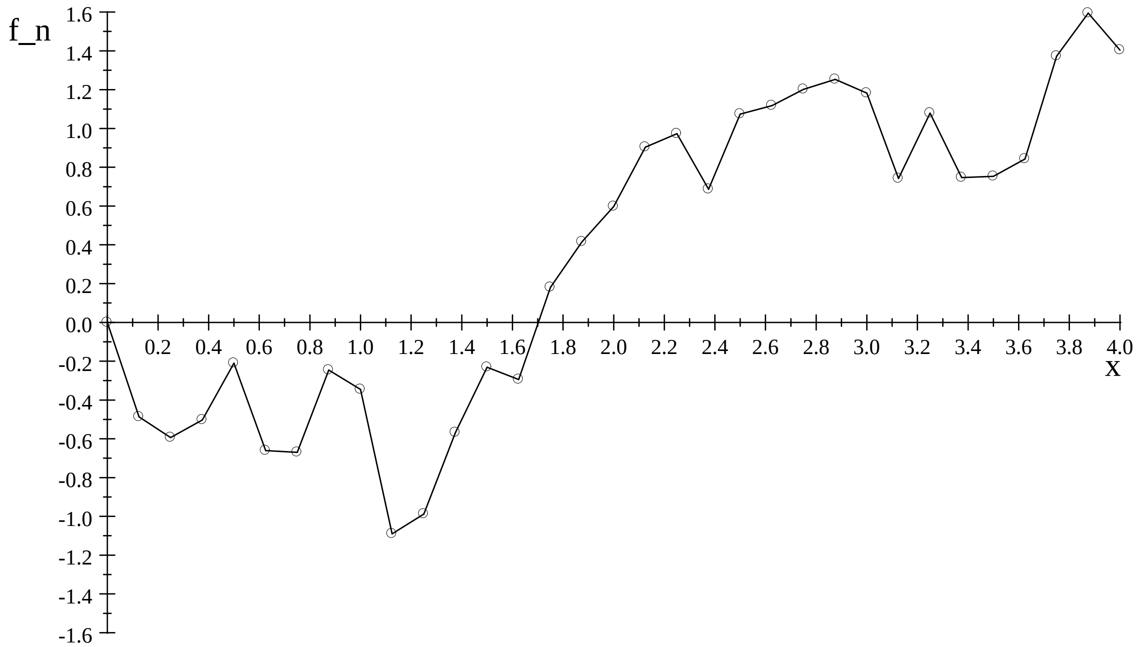
Unamos cada par de puntos consecutivos de ese conjunto mediante un segmento de recta. Obtenemos así la gráfica de una función continua lineal por pedazos. Denotemos por $f_n^{(\omega)}$ a la función, definida sobre el intervalo $[0, N]$, que corresponde a esa gráfica.



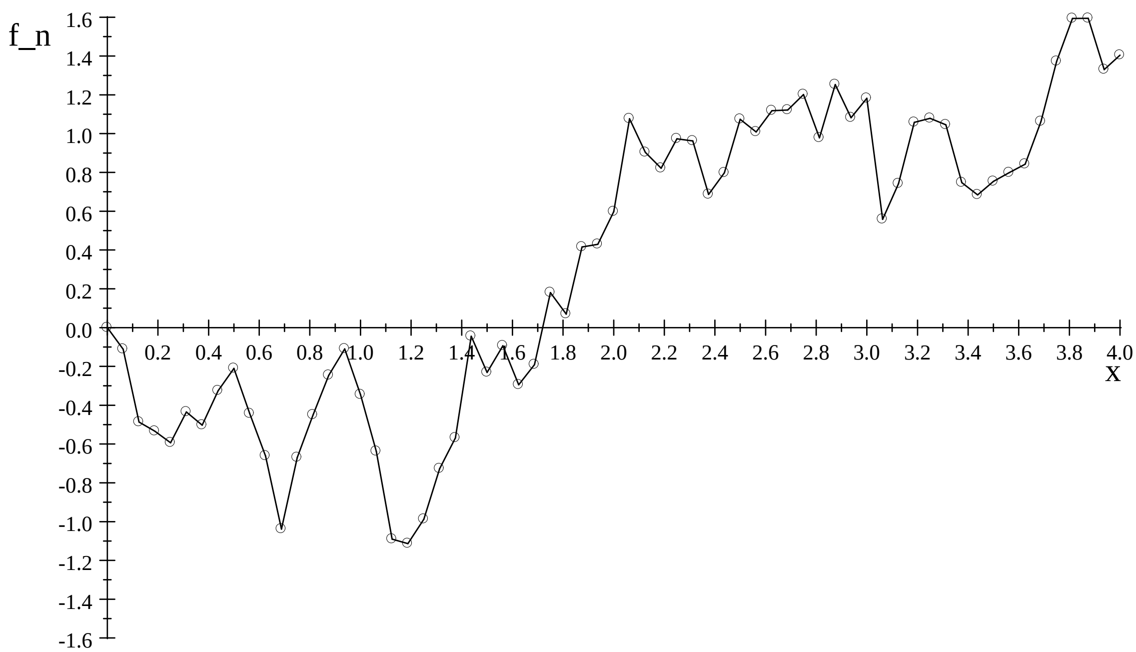
N = 4, n = 1



N = 4, n = 2


f_n
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
-1.2
-1.4
-1.6
0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0 2.2 2.4 2.6 2.8 3.0 3.2 3.4 3.6 3.8 4.0
x

N = 4, n = 3


f_n
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
-1.2
-1.4
-1.6
0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0 2.2 2.4 2.6 2.8 3.0 3.2 3.4 3.6 3.8 4.0
x

N = 4, n = 4

Consideremos $t_j = \frac{j}{2^n}$ y $t_{j+1} = \frac{j+1}{2^n}$ dos puntos consecutivos en D_n.

Como $f_n^{(\omega)}$ es lineal entre esos puntos, se tiene:

$$f_n^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(W_{t_j}(\omega) + W_{t_{+1}}(\omega)\right)$$

Además:

$$f_{n+1}^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) = W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}}(\omega)$$

Así que:

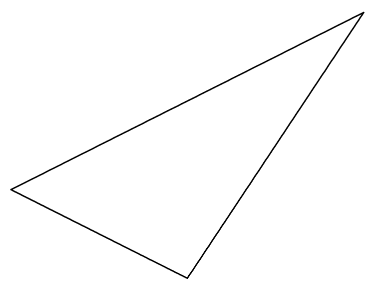
$$f_{n+1}^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) - f_n^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) = W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}}(\omega) - \frac{1}{2}\left(W_{t_j} + W_{t_{j+1}}\right)(\omega)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}}(\omega) - W_{t_j}(\omega)\right) - \left(W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}}(\omega)\right)\right]$$

Como los incrementos de $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ son independientes y cada uno de ellos tiene distribución normal con parámetros $\mu = 0$ y varianza igual a la diferencia de los índices de W_t, la función $\omega \to f_{n+1}^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) - f_n^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right)$ es una variable aleatoria con distribución normal de parámetros $\mu = 0$ y:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2^2}\left[\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2} - t_j\right) + \left(t_{j+1} - \frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right)\right] = \frac{1}{2^2}\left(t_{j+1} - t_j\right) = \frac{1}{2^{n+2}}$$

Por otra parte, obsérvese que el valor máximo de $\left|f_{n+1}^{(\omega)}(t) - f_n^{(\omega)}(t)\right|$, para $t \in [t_j, t_{j+1}]$, se obtiene cuando $t = \frac{t_j+t_{j+1}}{2}$.



Así que:

$$\sup\left\{\left|f_{n+1}^{(\omega)}(t) - f_n^{(\omega)}(t)\right| : t \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]\right\} = \left|f_{n+1}^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) - f_n^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right)\right|$$

Paso 4.

Si X es una variable aleatoria con distribución normal de parámetros $\mu = 0$ y σ^2, se tiene, para cualquier $x > 0$:

$P[X \geq x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}dy \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{y}{x}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}dy$

$= \frac{\sigma}{x\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{y}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}dy = \frac{\sigma}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}$

Así que:

$$P[|X| \geq x] \leq \frac{2\sigma}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}$$

Paso 5.

Lo que queremos demostrar es que, para cada $\omega \in \Omega$, la sucesión de funciones $\left(f_n^{(\omega)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en el intervalo $[0, N]$.

Recordemos que si $\mathbf{C} = \{f : [0, N] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ y, para $f \in \mathbf{C}$, definimos:

$$\|f\|_s = \sup\{|f(x)| : x \in [0, N]\}$$

entonces $\|\cdot\|_s$ es una norma y que $\mathbf{C}$, con esa norma, es un espacio normado completo, es decir, cualquier sucesión de Cauchy es convergente. Además, una sucesión de funciones en $\mathbf{C}$ converge con la norma $\|\cdot\|_s$ si y sólo si converge uniformemente.

Por lo anterior, dada $\varepsilon_n > 0$, se tiene:

$$P\left[\left\{\omega \in \Omega : \left\|f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)}\right\|_s \geq \varepsilon_n\right\}\right]$$

$$= P\left[\bigcup_{j=0}^{N2^n-1}\left\{\omega \in \Omega : \sup\left\{\left|f_{n+1}^{(\omega)}(t) - f_n^{(\omega)}(t)\right| : t \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]\right\} \geq \varepsilon_n\right\}\right]$$

$$= P\left[\bigcup_{j=0}^{N2^n-1}\left\{\omega \in \Omega : \left|f_{n+1}^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) - f_n^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right)\right| \geq \varepsilon_n\right\}\right]$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N2^n-1} P\left[\left\{\omega \in \Omega : \left|f_{n+1}^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) - f_n^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right)\right| \geq \varepsilon_n\right\}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{N2^n-1} \frac{2}{\varepsilon_n\sqrt{2^{n+2}}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{2^{n+2}}{2}\varepsilon_n^2} = \sum_{j=0}^{N2^n-1} \frac{1}{\varepsilon_n 2^{n/2}\sqrt{2\pi}}e^{-2^{n+1}\varepsilon_n^2}$$

$$\leq \frac{N2^n}{\varepsilon_n 2^{n/2}\sqrt{2\pi}}e^{-2^{n+1}\varepsilon_n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{N2^{n/2}}{\varepsilon_n}e^{-2^{n+1}\varepsilon_n^2}$$

Paso 6.

Ahora vamos a utilizar el lema de Borel-Cantelli, el cual asegura que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de eventos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, entonces:

$$P\left[\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ para una infinidad de valores de } n\}\right] = 0$$

Para poderlo aplicar necesitamos demostrar entonces que la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left[\left\{\omega \in \Omega : \left\| f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)} \right\|_s \geq \varepsilon_n \right\}\right]$$

es convergente, lo cual demostraremos probando que la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N2^{n/2}}{\varepsilon_n} e^{-2^{n+1}\varepsilon_n^2}$$

es convergente.

Para esto, y también para lo que sigue, tenemos que elegir un valor adecuado de ε_n.

Tomemos $\varepsilon_n = \frac{1}{2^{(n+1)/4}}$. Entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N2^{n/2}}{\varepsilon_n} e^{-2^{n+1}\varepsilon_n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N2^{n/2}}{\varepsilon_n} \frac{1}{e^{2^{n+1}\varepsilon_n^2}} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N2^{n/2}}{\varepsilon_n} \frac{1}{2^{2^{n+1}\varepsilon_n^2}}$$

$$= \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{(3n+1)/4}}{2^{2^{(n+1)/2}}}$$

Si $n \geq 6$, se tiene:

$$\frac{2^{(3n+1)/4}}{2^{2^{(n+1)/2}}} = \frac{1}{2^{2^{(n+1)/2}-(3n+1)/4}} < \frac{1}{2^n}$$

Así que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N2^{n/2}}{\varepsilon_n} e^{-2^{n+1}\varepsilon_n^2} < \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{5} \frac{2^{(3n+1)/4}}{2^{2^{(n+1)/2}}} + \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

Por lo tanto, la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left[\left\{\omega \in \Omega : \left\| f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)} \right\|_s \geq \frac{1}{2^{(n+1)/4}} \right\}\right]$$

es convergente.

Así que, por el lema de Borel-Cantelli:

$$P\left[\left\{\omega \in \Omega : \left\| f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)} \right\|_s \geq \frac{1}{2^{(n+1)/4}} \text{ para una infinidad de valores de } n \right\}\right] = 0$$

Por lo tanto:

$P\left[\left\{\omega \in \Omega : \text{Existe } N_\omega \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left\|f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)}\right\|_s < \frac{1}{2^{(n+1)/4}} \text{ para cualquier } n \geq N_\omega\right\}\right]$
$= 1$

Sea $E_N = \left\{\omega \in \Omega : \text{Existe } N_\omega \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left\|f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)}\right\|_s < \frac{1}{2^{(n+1)/4}} \text{ para cualquier } n \geq N_\omega\right\}$

Para cualesquiera $\omega \in E_N$, $m \in \mathbb{N}$ y cualquier $n \geq N_\omega$, se tiene entonces:

$\left\|f_{n+m}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)}\right\|_s \leq \sum_{k=0}^{m-1} \left\|f_{n+k+1}^{(\omega)} - f_{n+k}^{(\omega)}\right\|_s < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^{(n+k+1)/4}}$

$= \frac{1}{2^{n/4}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^{(k+1)/4}} = \frac{1}{2^{n/4}} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2^{j/4}} = \frac{1}{2^{n/4}} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\left(2^{1/4}\right)^j}$

$< \frac{1}{2^{n/4}} \frac{1}{2^{1/4}-1} < \frac{1}{2^{n/4}}$

Dada $\varepsilon > 0$, tomemos $M \in \mathbb{N}$ tal que $M \geq N_\omega$ y $\frac{1}{2^{M/4}} < \varepsilon$. Entonces:

$$\left\|f_m^{(\omega)} - f_n^{(\omega)}\right\|_s < \varepsilon$$

para cualquier pareja de números naturales n y m mayores o iguales que M.

Así que la sucesión $\left(f_n^{(\omega)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y, por lo tanto, converge.

Por lo tanto, la sucesión de funciones $f_n^{(\omega)} : [0, N] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente; así que su límite $f^{(\omega)}$ es una función continua.

Paso 7.

Definamos:

$$\widetilde{W}_t^{(N)}(\omega) = f^{(\omega)}(t)$$

Entonces la función $t \to \widetilde{W}_t^{(N)}(\omega)$ es continua en el intervalo $[0, N]$ para cualquier $\omega \in E_N$.

Paso 8.

Si $t \in [0, N]$, sea $\{t_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de racionales diádicos en $D^{(N)}$ que converja a t. Entonces, como W_{t_n} converge a W_t en probabilidad, existe una subsucesión $\{t_{k_n}\}$ tal que:

$$\widetilde{W}_t^{(N)} = \text{lím}_{n \to \infty} \widetilde{W}_{t_{k_n}}^{(N)} = \text{lím}_{n \to \infty} W_{t_{k_n}} = W_t \text{ con probabilidad } 1$$

Por lo tanto $\left\{\widetilde{W}_t^{(N)}\right\}_{t \in [0,N]}$ y $\{W_t\}_{t \in [0,N]}$ tienen las mismas distribuciones finito dimensionales.

Además, para $\omega \in E_N \cap E_{N+1}$, $\left\{\widetilde{W}_t^{(N)}(\omega)\right\}_{t \in [0,N]}$ y $\left\{\widetilde{W}_t^{(N+1)}(\omega)\right\}_{t \in [0,N+1]}$ coinciden en los racionales diádicos en el intervalo $[0, N]$ y, como ambos son continuos, coinciden en cualquier $t \in [0, N]$.

Paso 9.

Para cada $\omega \in \cap_{N=1}^{\infty} E_N$ y $t \in [0, \infty)$, definamos:

$$\widetilde{W}_t(\omega) = \widetilde{W}_t^{(N)}(\omega) \text{ si } t \in [N-1, N)$$

Si $\omega \notin \cap_{N=1}^{\infty} E_N$, definamos:

$$\widetilde{W}_t(\omega) = 0 \text{ para cualquier } t \in [0, \infty)$$

Se tiene entonces que la función $t \to \widetilde{W}_t(\omega)$, definida en el intervalo $[0, \infty)$, es continua para cualquier $\omega \in \Omega$.

Paso 10.

Como $\left(\widetilde{W}_t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ y $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ tienen las mismas distribuciones finito dimensionales, e tiene:

1. $\widetilde{W}_0 = 0$.
2. Si $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ son números reales positivos, entonces las variables aleatorias $\widetilde{W}_{t_1} - \widetilde{W}_0, \widetilde{W}_{t_2} - \widetilde{W}_{t_1}, \ldots, \widetilde{W}_{t_n} - \widetilde{W}_{t_{n-1}}$ son independientes.
3. Si $0 \leq s < t$, la distribución de $\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s$ es normal com parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = t - s$.

El proceso $\left(\widetilde{W}_t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ así definido es llamado un proceso de Wiener.

Método de Kolmogorov

Kolmogorov siguió un método diferente para mostrar que es posible modificar el proceso $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ para obtener uno con la propiedade adicional de que las trayectorias sean continuas.

El método de Kolmogov se aplica no sólo al proceso de Wiener; a continuación se presenta para este caso particular y al final se enuncia el resultado general.

El primer paso es exactamente el mismo que el enunciado con el primer método y el segundo consiste únicamente en definiciones, como en el primer método; es a partir del paso 3 donde se presenta la diferencia.

Paso 1.

Primero observemos que si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el intervalo $[0,N]$ que converge a t, entonces la sucesión de variables aleatorias $(W_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilidad a W_t.

En efecto, como, para cualquier pareja de números reales no negativos s y t tales que $s<t$, $W_t - W_s$ tiene distribución normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = t-s$, se tiene:

$E\left[(W_t - W_s)^2\right] = |t-s|$ para cualquier par de números reales no negativos s y t.

Así que, para cualquier $\beta > 0$, se tiene:

$$P\left[|W_t - W_{t_n}| > \beta\right] = P\left[(W_t - W_{t_n})^2 > \beta^2\right] \leq \frac{1}{\beta^2} E\left[(W_t - W_{t_n})^2\right] = \frac{1}{\beta^2}|t-s|$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|W_t - W_{t_n}| > \beta\right] \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta^2}|t-t_n| = 0$$

Paso 2.

Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea D_n el conjunto de racionales diádicos de la forma $\frac{k}{2^n}$; es decir:

$$D_n = \left\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots\right\}$$

$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es entonces el conjunto de racionales diádicos contenidos en el intervalo$[0,\infty)$.

Para $N\in\mathbb{N}$, definamos $D_n^{(N)} = D_n \cap [0,N]$ y $D^{(N)} = D\cap[0,N]$.

Paso 3.

Como, para cualquier pareja de números reales no negativos s y t tales que $s < t$, $W_t - W_s$ tiene distribución normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = t - s$, se tiene:

$E\left[(W_t - W_s)^4\right] = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^4 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} e^{-x} dx$

$= \frac{4(t-s)^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{4(t-s)^2}{\sqrt{\pi}} \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = 3\,(t-s)^2$

Definamos:

$$K_n = \sup\left\{\left|W_{\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k-1}{2^n}}\right| : k \in \{1, \ldots, N2^n\}\right\}$$

Se tiene entonces:

$$E\left[K_n^4\right] \leq \sum_{k=1}^{N2^n} E\left[\left|W_{\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k-1}{2^n}}\right|^4\right] \leq 3N2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{3N}{2^n}$$

Paso 4.

Sea $m \in \{0, 1, \ldots\}$ y $s, t \in D^{(N)}$ tales que $t - s \in \left(\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}\right]$.

Para $j \in \{m, m+1, \ldots\}$, definamos:

$$t_j = \text{máx}\{x \in D_j : x \leq t\}$$

$$s_j = \text{máx}\{x \in D_j : x \leq s\}$$

Se tiene $s_m \leq t_m$ y, si $s_m < t_m$, entonces:

$$s_m \leq s < s_m + \frac{1}{2^m} \leq t_m \leq t$$

Así que:

$$\frac{1}{2^m} \leq t_m - s_m < t - s + \frac{1}{2^m} \leq \frac{2}{2^m}$$

de lo cual se concluye que $t_m - s_m = \frac{1}{2^m}$

Por lo tanto, o bien $s_m = t_m$, o bien s_m y t_m son elementos consecutivos de $D_m^{(N)}$.

Además, $t_m \leq t_{m+1} \leq \cdots$ y $t_{m+i} = t$ para alguna $i \in \{0, 1, \ldots\}$.

De la misma manera, se tiene $s_m \leq s_{m+1} \leq \cdots$ y $s_{m+k} = s$ para alguna $k \in \{0, 1, \ldots\}$.

También, para cualquier $j \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$t_{m+j-1} \leq t_{m+j} \leq t < t_{m+j-1} + \frac{1}{2^{m+j-1}}$$

Así que, o bien $t_{m+j} = t_{m+j-1}$, o bien t_{m+j} es el punto medio del intervalo $\left[t_{m+j-1}, t_{m+j-1} + \frac{1}{2^{m+j-1}}\right]$; por lo tanto, t_{m+j-1} y t_{m+j} son, o bien iguales, o bien elementos consecutivos de D_{m+j}.

De la misma manera, s_{m+j-1} y s_{m+j} son, o bien iguales, o bien elementos consecutivos de D_{m+j}.

Se tiene entonces:

$|W_t - W_s| \leq |W_t - W_{t_m}| + |W_{t_m} - W_{s_m}| + |W_s - W_{s_m}|$

$= \left|W_{t_{m+i}} - W_{t_m}\right| + |W_{t_m} - W_{s_m}| + \left|W_{s_{m+k}} - W_{s_m}\right|$

$= \sum_{j=1}^{i} \left|W_{t_{m+j}} - W_{t_{m+j-1}}\right| + |W_{t_m} - W_{s_m}| + \sum_{j=1}^{k} \left|W_{s_{m+j}} - W_{s_{m+j-1}}\right|$

$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|W_{t_{m+j}} - W_{t_{m+j-1}}\right| + |W_{t_m} - W_{s_m}| + \sum_{j=1}^{\infty} \left|W_{s_{m+j}} - W_{s_{m+j-1}}\right|$

$\leq \sum_{j=1}^{\infty} K_{m+j} + K_m + \sum_{j=1}^{\infty} K_{m+j} \leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} K_{m+j} = 2 \sum_{j=m}^{\infty} K_j$

Con el mismo razonamiento se tiene el mismo resultado si $s - t \in \left(\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}\right]$.

Por lo tanto, si $s, t \in D^{(N)}$, $m \in \{0, 1, \ldots\}$ y $|t - s| \in \left(\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}\right]$, entonces:

$$\frac{|W_t - W_s|}{|t-s|^\alpha} \leq \frac{2}{|t-s|^\alpha} \sum_{j=m}^{\infty} K_j < 2^{(m+1)\alpha+1} \sum_{j=m}^{\infty} K_j$$

Paso 5.

Ahora, para $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, definamos:

$$M_\alpha = \sup \left\{ \frac{|W_t - W_s|}{|t-s|^\alpha} : s, t \in D^{(N)} \text{ y } |t - s| \in (0, 1] \right\}$$

Se tiene entonces:

$M_\alpha = \sup \left\{ \frac{|W_t - W_s|}{|t-s|^\alpha} : s, t \in D^{(N)} \text{ y } |t - s| \in \cup_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}\right] \right\}$

$= \sup \left\{ \sup \left\{ \frac{|W_t - W_s|}{|t-s|^\alpha} : s, t \in D^{(N)} \text{ y } t - s \in \left(\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}\right] \right\} : m \in \{0, 1, \ldots\} \right\}$

$\leq \sup \left\{ 2^{(m+1)\alpha+1} \sum_{j=m}^{\infty} K_j : m \in \{0, 1, \ldots\} \right\}$

$= 2^{\alpha+1} \sup \left\{ 2^{m\alpha} \sum_{j=m}^{\infty} K_j : m \in \{0, 1, \ldots\} \right\}$

$\leq 2^{\alpha+1} \sup \left\{ \sum_{j=m}^{\infty} 2^{j\alpha} K_j : m \in \{0, 1, \ldots\} \right\}$

$= 2^{\alpha+1} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} K_j$

$(E[M_\alpha^4])^{\frac{1}{4}} \leq 2^{\alpha+1} \left(E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} K_j \right)^4 \right] \right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\alpha+1} \left(E\left[\left(\text{lím}_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} 2^{j\alpha} K_j \right)^4 \right] \right)^{\frac{1}{4}}$

$= 2^{\alpha+1} \left(E\left[\text{lím}_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} 2^{j\alpha} K_j \right)^4 \right] \right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\alpha+1} \left(\text{lím}_{n\to\infty} E\left[\left(\sum_{j=0}^{n} 2^{j\alpha} K_j \right)^4 \right] \right)^{\frac{1}{4}}$

$= 2^{\alpha+1} \, \text{lím}_{n\to\infty} \left(E\left[\left(\sum_{j=0}^{n} 2^{j\alpha} K_j \right)^4 \right] \right)^{\frac{1}{4}}$

Paso 6.

Por la desigualdad de Minkowski, se tiene, para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(E\left[\left(\sum_{j=0}^{n} 2^{j\alpha} K_j \right)^4 \right] \right)^{\frac{1}{4}} \leq \sum_{j=0}^{n} 2^{j\alpha} \left(E\left[K_j^4 \right] \right)^{\frac{1}{4}}$$

Así que:

$(E[M^4])^{\frac{1}{4}} \leq 2^{\alpha+1} \, \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \left(E\left[\left(\sum_{j=0}^{n} 2^{j\alpha} K_j \right)^4 \right] \right)^{\frac{1}{4}} \leq 2^{\alpha+1} \, \text{lím}_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} 2^{j\alpha} \left(E\left[K_j^4 \right] \right)^{\frac{1}{4}}$

$= 2^{\alpha+1} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} \left(E\left[K_j^4 \right] \right)^{\frac{1}{4}} \leq 2^{\alpha+1} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} (3N)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2^j} \right)^{\frac{1}{4}}$

$= 2^{\alpha+1} (3N)^{\frac{1}{4}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)} = 2^{\alpha+1} (3N)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1-2^{-\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)}} = (3N)^{\frac{1}{4}} \frac{2^{(1/4+1)}}{2^{\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)}-1} = (3N)^{\frac{1}{4}} \frac{2^{5/4}}{2^{\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)}-1}$

Por lo tanto:

$$E[M_\alpha^4] \leq 3N \frac{2^5}{\left(2^{\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)}-1 \right)^4} < \infty$$

Así que:

$$E\left[\left(\sup\left\{\frac{|W_t-W_s|}{|t-s|^{\alpha}} : s,t \in D^{(N)} \text{ y } |t-s| \in (0,1]\right\}\right)^4\right] < \infty$$

Por lo tanto:

$$P\left[\sup\left\{\frac{|W_t-W_s|}{|t-s|^{\alpha}} : s,t \in D^{(N)} \text{ y } |t-s| \in (0,1]\right\} < \infty\right] = 1$$

Paso 7.

Sea $B = \left\{\omega \in \Omega : M_{\alpha}(\omega) = \sup\left\{\frac{|W_t(\omega)-W_s(\omega)|}{|t-s|^{\alpha}} : s,t \in D^{(N)} \text{ y } |t-s| \in (0,1]\right\} < \infty\right\}$.

Entonces $P(B) = 1$ y, para cualquier $\omega \in \Omega$, se tiene:

$$|W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leq M_{\alpha}(\omega)\,|t-s|^{\alpha}$$

para cualquier pareja $s,t \in D^{(N)}$ tal que $|t-s| \in (0,1]$.

Así que la función $t \mapsto W_t(\omega)$, definida sobre el intervalo $[0,N]$, es uniformemente continua sobre $D^{(N)}$. Por lo tanto se puede extender a una función continua definida en el intervalo $[0,N]$.

Paso 8.

Para cada $t \in [0,N]$, definamos:

$$\widetilde{W}_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{t_n \to t} W_s(\omega) & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{si } \omega \notin B \end{cases}$$

donde $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales diádicos en $D^{(N)}$ que converge a t.

Entonces se tiene:

$$\left|\widetilde{W}_t(\omega) - \widetilde{W}_s(\omega)\right| \leq M_{\alpha}(\omega)\,|t-s|^{\alpha}$$

para cualquier $\omega \in \Omega$ y cualquier pareja $s,t \in [0,N]$ tal que $|t-s| \in (0,1]$.

Así que la función $t \mapsto \widetilde{W}_t(\omega)$ es continua en el intervalo $[0,N]$.

Más aún, si $s,t \in [0,N]$, $|t-s| \in (0,1]$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de racionales diádicos en $D^{(N)}$ que convergen a s y t, respectivamente, y tales que $|t_n - s_n| \in (0,1]$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\frac{\left|\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s\right|}{|t-s|^{\alpha}} = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{|W_{t_n} - W_{s_n}|}{|t_n - s_n|^{\alpha}} \leq \sup\left\{\frac{|W_t - W_s|}{|t-s|^{\alpha}} : s,t \in D^{(N)} \text{ y } |t-s| \in (0,1]\right\}$$

Así que:

$$\sup\left\{\frac{\left|\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s\right|}{|t-s|^{\alpha}} : s,t \in [0,N] \text{ y } |t-s| \in (0,1]\right\} \leq \sup\left\{\frac{|W_t - W_s|}{|t-s|^{\alpha}} : s,t \in D \text{ y } |t-s| \in (0,1]\right\}$$

Por lo tanto:

$$E\left[\left(\sup\left\{\frac{\left|\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s\right|}{|t-s|^{\alpha}} : s,t \in [0,N] \text{ y } |t-s| \in (0,1]\right\}\right)^4\right] < \infty$$

Paso 9.

Si $t \in [0,N]$, sea $\{t_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de racionales diádicos en $D^{(N)}$ que converja a t. Entonces, como X_{t_n} converge a X_t en probabilidad, existe una subsucesión $\{t_{k_n}\}$ tal que:

$$\widetilde{W}_t = \text{lím}_{n\to\infty} \widetilde{W}_{t_{k_n}} = \text{lím}_{n\to\infty} W_{t_{k_n}} = W_t \text{ con probabilidad 1}$$

Por lo tanto $\left(\widetilde{W}_t^{(N)}\right)_{t\in[0,N]}$ y $(W_t)_{t\in[0,N]}$ tienen las mismas distribuciones finito dimensionales.

Además $\left(\widetilde{W}_t^{(N)}\right)_{t\in[0,N]}$ y $\left(\widetilde{W}_t^{(N+1)}\right)_{t\in[0,N+1]}$ coinciden en los racionales diádicos en el intervalo $[0,N]$ y, como ambos son continuos, coinciden en cualquier $t \in [0,N]$.

Paso 10.

Para cada $\omega \in \Omega$ y $t \in [0,\infty)$, definamos:

$$\widetilde{W}_t(\omega) = \widetilde{W}_t^{(N)}(\omega) \text{ si } t \in [N-1,N)$$

El proceso estocástico $\left(\widetilde{W}_t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ así definido satisface las propiedades que caracterizan al proceso de Wiener.

■

El resultado general de Kolmogorov es el siguiente:

Teorema 1 (Kolmogorov)**.** *Sea* $(\Omega, \Im, P)$ *un espacio de probabilidad,* $N \in \mathbb{N}$ *y* $(X_t)_{t\in[0,N]}$ *un proceso estocástico definido sobre* $(\Omega, \Im, P)$*, con espacio de estados* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. Supongamos que existen constantes positivas* γ*,* ε *y* c *tales que:*

$$E\left[|X_t - X_s|^\gamma\right] \leq c\,|t-s|^{1+\varepsilon}$$

para cualquier pareja $s, t \in [0, N]$.

Entonces:

1. existe una modificación $\left(\widetilde{X}_t\right)_{t\in[0,N]}$ de $(X_t)_{t\in[0,N]}$ tal que:

$$E\left[\left(\sup\left\{\tfrac{|\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s|}{|t-s|^\alpha} : s,t \in [0,N] \text{ y } |t-s| \in (0,1]\right\}\right)^\gamma\right] < \infty$$

para cualquier $\alpha \in \left(0, \frac{\varepsilon}{\gamma}\right)$.

2. Existe una modificación $\left(\widetilde{X}_t\right)_{t\in[0,N]}$ de $(X_t)_{t\in[0,N]}$ tal que, para cualquier $\alpha \in \left(0, \frac{\varepsilon}{\gamma}\right)$ y cualquier $\omega \in \Omega$, existe $M_\alpha(\omega) \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\left|\widetilde{X}_t(\omega) - \widetilde{X}_s(\omega)\right| \leq M_\alpha(\omega)\,|t-s|^\alpha$$

para cualquier pareja $s, t \in [0, N]$ tal que $|t-s| \in [0, 1]$.

3. Existe una modificación de $(X_t)_{t\in[0,N]}$ con trayectorias continuas.

En el caso del proceso $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, se tiene, para cualquier pareja de números reales no negativos s y t:

$$E\left[(W_t - W_s)^4\right] = 3\,(t-s)^2$$

Así que se puede aplicar el resultado de Kolmogorov tomando $\gamma = 4$, $\varepsilon = 1$ y $c = 3$.